

BERÄKNING AV FREKVENNS AV TORRÅR

av L. Gottschalk

HYDROLOGISKA BYRÅN

HB RAPPORT NR 20

Norrköping 1976

SVERIGES METEOROLOGISKA OCH HYDROLOGISKA INSTITUT
HYDROLOGISKA BYRÅN



BERÄKNING AV FREKVENNS AV TORRÅR

av L. Gottschalk

HYDROLOGISKA BYRÅN

HB RAPPORT NR 20 Norrköping 1976

BERÄKNING AV FREKVENNS AV TORRÅR

av

L. Gottschalk

HYDROLOGISKA BYRÅN

HB RAPPORT NR 20

Norrköping 1976

Sveriges Meteorologiska och Hydrologiska Institut

<u>Innehållsförteckning</u>	<u>sid</u>
Sammanfattning	1
Förteckning över tabeller	2
Förteckning över figurer	3
Förteckning över symboler	4
1. Inledning	5
2. Definition av torrår	7
3. Sannolikhet för gruppering av torrår, kontinuerlig modell	8
4. Sannolikhet för gruppering av torrår, diskret modell	13
5. Slutsatser	38
6. Litteratur	40

Sammanfattning

Inom en observerad avrinningsserie förekommer endast ett fåtal eller inga grupperingar av två, tre osv. torrår i följd. Detta tillåter naturligtvis inte att man med någon noggrannhet uppskattar sannolikheten för sådana grupperingar. För beräkning av sannolikheten för gruppering av torrår måste vi uppställa en teori för hur detta sker. Denna redogöres närmare för i avsnitten 3 och 4 av denna rapport och bygger på antagande om att avrinning kan betraktas som en Markov-process.

Vi har valt att definiera torrår utifrån årliga avrinningsvärden (kalenderår). Vi säger att om avrinningsvärdet Q för ett visst år underskrider någon fixerad gräns Q_0 så har vi ett torrår (se avsnitt 2). Väljer vi Q_0 lika med medelvärdet $\bar{Q}$ respektive 25 % - percentilen Q_{25} kan beräkningen från observerade serier av sannolikheten för uppträdande av en m - års följd av torrår omgiven av icke - torrår (Fig. 1.) sammanfattas enligt tabellen nedan:

		m				
		1	2	3	4	5
Norra Sverige	$Q_0 = \bar{Q}$	0.105	0.057	0.031	0.018	0.010
	$Q_0 = Q_{25}$	0.132	0.047	0.011	0.004	0.001
Södra Sverige	$Q_0 = \bar{Q}$	0.084	0.050	0.030	0.018	0.011
	$Q_0 = Q_{25}$	0.117	0.034	0.012	0.005	0.002

Tillvägagångssättet vid beräkningen redogörs för i avsnitt 4. Formel (22) och tabellerna 2 och 3 alternativt 6 och 7 ger möjlighet att beräkna sannolikheten för uppträdande av en torrårsperiod av godtycklig längd m .

För ett godtyckligt värde Q_0 kan vi för beräkningen ovan utnyttja figurena 2 - 6. Hur dessa figurer användes redogörs för i avsnitt 3 sidan 12.

Vi skall uppmärksamma att angivna sannolikheter gäller för uppträdande av exakt m torrår i följd och icke för m eller flera torrår i följd.

Förteckning över tabeller

Tabell sid 10	1.	Statistiska parametrar beräknade för observations-serier över årlig avrinning.
Tabell sid 21	2.	Teoretiska absoluta sannolikheter och övergångs-sannolikheter för en enkel Markov-kedja för sannolikhetsnivån 50 %.
Tabell sid 22	3.	Teoretiska absoluta sannolikheter och övergångs-sannolikheter för en enkel Markov-kedja för sannolikhetsnivån 25 %.
Tabell sid 24	4.	Observerade Markov-kedjor för sannolikhetsnivån 50 %.
Tabell sid 26	5.	Observerade Markov-kedjor för sannolikhetsnivån 25 %.
Tabell sid 28	6.	Beräknade absoluta sannolikheter och övergångs-sannolikheter för sannolikhetsnivån 50 %.
Tabell sid 30	7.	Beräknade absoluta sannolikheter och övergångs-sannolikheter för sannolikhetsnivån 25 %.
Tabell sid 32	8.	95 % konfidensgränser för skattade sannolikheter för oberoende process (ekv. 20)
Tabell sid 33	9.	95 % konfidensgränser för skattade sannolikheter för beroende process (ekv. 21)
Tabell sid 35	10.	Teoretiska sannolikheter för uppkomst av m torrår i följd.
Tabell sid 36	11.	Beräknade sannolikheter för uppkomst av m torrår i följd.
Tabell sid 37	12.	Beräknade sannolikheter för uppkomst av m torrår i följd på 25 % - sannolikhetsnivå.

Förteckning över figurer

Figur 1 Illustration till uppträdande av m torrår i följd
sid 8

Figur 2-6 Diagram för beräkning av sannolikheten för m
sid 14-18 (m = 1, 2, ..., 5) torrår i följd som funktion av
avrinningen (standardiserat värde $x = \frac{Q - \bar{Q}}{S_Q}$)
och korrelationskoefficient.

Förteckning över symboler

$F_n(x_1, \dots, x_n)$	n-variater kumulativ fördelningsfunktion
$P\{A\}$	sannolikheten för händelsen A
$P\{A B\}$	betingad sannolikhet för A om B
$\mathcal{P}$	övergångsmatris
p_i^n	absolut sannolikhet
p_{ij}	övergångssannolikhet
Q	årlig avrinning (kalenderår)
Q_0	fixerat värde på årlig avrinning Q
$\overline{Q}$	långtidsmedelvärde av årlig avrinning Q
Q_{25}	25 % - percentil av årlig avrinning
s	standardavvikelse för årlig avrinning
t	tidpunkt
X	stokastisk variabel, standardiserad avrinning
x	observerat värde av X
z	integrationsvariabel
α	övergångssannolikhet
β	övergångssannolikhet
ζ	korrelationskoefficient
Φ	sannolikhet för gruppering av torrår
$\phi_n(x)$	n-variant fördelningsfunktion ($F_n(x, x, \dots, x)$)

1. Inledning

Föreliggande arbete bör ses som en inledning till studiet av frekvenser av torrår. Detta är ett svårt problem där en mängd komplexa processer spelar in såsom storskalig atmosfärisk cirkulation och långtidsmagasinering av vatten i mark och sjöar. Information som finns att tillgå i form av observationsserier är i regel otillräcklig för att verifiera uppställda teorier om gruppering av torrår.

Det är i första hand i samband med flerårsregleringar av reservoarer som frekvens av torrår har närmare analyserats och i litteraturen finns ett stort antal arbeten som mer eller mindre direkt ägnats åt denna problematik. Tillämpade teorier bygger på förutsättningen att geofysiska processer kan beskrivas som en Markov-process. Detta innebär att följande villkor måste vara uppfyllt:

$$\begin{aligned} &P\{X(t_n) < x_n \mid \dots X(t_{-1}) = x_{-1} ; X(t_0) = x_0 ; X(t_1) = x_1 ; \dots \\ &\dots ; X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} = \\ &= P\{X(t_n) < x_n \mid X(t_1) = x_1 ; \dots ; X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \dots \quad (1) \end{aligned}$$

Här betecknar $X(t_i)$ den studerade geofysiska processens värde vid tidpunkten t_i , x_i , är konstanter och $P\{A \mid B\}$ betecknar den betingade sannolikheten dvs sannolikheten att A inträffar om vi vet att B har inträffat. Markov-villkoret innebär således att för att uttala oss om vad som händer vid tidpunkten t_n är det tillräckligt att känna till processens tillstånd vid tidpunkterna $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$. Markov-villkoret är således mycket allmänt och omfattar i sig såväl lineära som icke lineära modeller för beskrivning av geofysiska processer.

I denna studie skall vi också använda oss av en Markov-modell. Med denna som utgångspunkt kan vi härleda uttryck som ger frekvensen av torrår. Detta visas i avsnitt 3 av detta arbete. I avsnitt fyra använder vi en diskret Markov-modell, en Markovkedja, för att följa upp antaganden i avsnitt tre på observerade serier. Hur torrår definieras redogöres i avsnitt 2 och allmänna slutsatser ges i avsnitt 4.

Vi har valt att ange sannolikheter (alt. frekvensen) för att en viss händelse uppträder. I hydrologisk litteratur talas ofta om en händelses återkomsttid. Definitionsmässigt erhålles denna som det inverterade värdet på sannolikheten. Återkomsttiden kan vara något förrädisk att använda. Dels ger den intrycket att händelsen inte bör inträffa med tätare intervall än just återkomsttiden. Sannolikheten för att detta sker är dock mycket stor. Till exempel är sannolikheten (risken) att en händelse med en viss återkomsttid inträffar minst en gång under en period med längden lika med återkomsttiden aldrig mindre än 0.63, och i regel större, större ju kortare återkomsttid. Dels kan återkomsttiden ge intryck av god noggrannhet. Den erhålles som sagts ovan som det inverterade värdet på sannolikheten. För värden på sannolikheten nära 0 fås mycket höga återkomsttider. En liten ändring i sannolikheten ger här mycket stora förändringar i den motsvarande återkomsttiden.

2. Definition av torrår

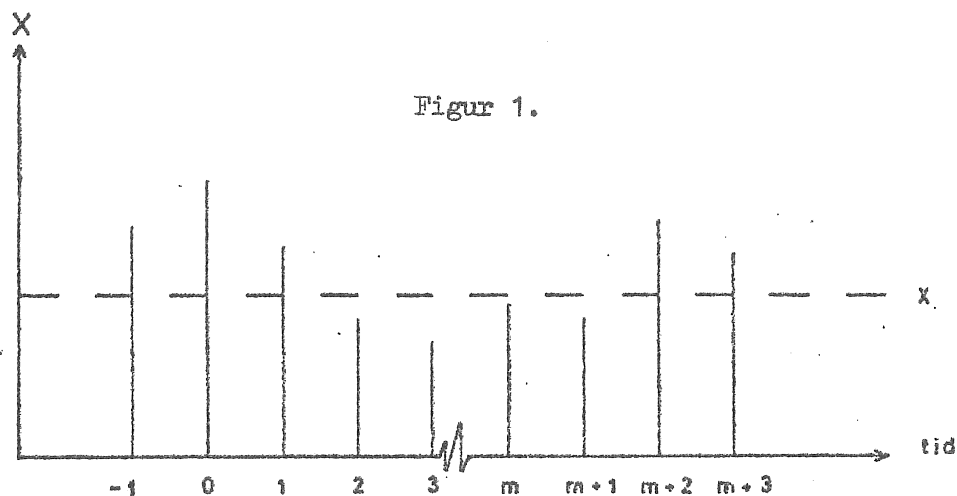
Ett torrår kan definieras från ett flertal fenomen såsom nederbörd, avrinning och grundvattennivå. För en flerårsreglering är ett torrår då det är underskott i den årliga tillrinningen till regleringsmagasinet och för jordbruket är ett torrår då det råder underskott i markfuktighet och nederbörd. Den kritiska gränsen för vad som skall definieras som torrår varierar också inom olika intressegrupper och också från plats till plats.

Vi har valt att utgå från årliga avrinningsvärden, beräknade över kalenderår, för karaktärisering av torrår. För att underlätta jämförelser mellan olika observationspunkter använder vi inte årsavrinningen Q direkt utan ett standardiserat värde av denna X dvs:

$$X = \frac{Q - \bar{Q}}{s} \quad (2)$$

där $\bar{Q}$ är medelvärdet av årsavrinningen och s dess standardavvikelse. Med ett torrår avses i detta arbete således ett år då X underskrider någon fixerad nivå x av den standardiserade årsavrinningen.

3. Sannolikhet för gruppering av torrår, kontinuerlig modell



Figur 1.

Låt oss betrakta fig. 1. Sannolikheten att vid tidpunkterna 1 och $m + 2$ avrinningen X_1 (standardiserat värde) antar värden större än några fixa värden x_1 och för alla andra händelser där emellan är mindre än dessa fixa värden kan uttryckas på följande vis:

$$\Phi = P\{X_1 > x_1, X_2 < x_2, \dots, X_{m+1} < x_{m+1}, X_{m+2} > x_{m+2}\} \quad (3)$$

Efter en del beräkningar kan ekvation (3) alternativt skrivas på formen

$$\begin{aligned} \Phi &= P\{X_2 \leq x_2, \dots, X_{m+1} < x_{m+1}\} - P\{X_2 < x_2, \dots, X_{m+2} < x_{m+2}\} - \\ &- P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_{m+1} < x_{m+1}\} + P\{X_1 < x_1, \dots, X_{m+2} < x_{m+2}\} \quad (4) \end{aligned}$$

Vi ersätter nu sannolikhetsuttrycken i ekv. 4 med korresponderande kummulativa fördelningsfunktioner i $m + 2$ dimensioner:

$$\begin{aligned} \Phi &= F_{m+2}(\infty, x_2, \dots, x_{m+1}, \infty) - F_{m+2}(\infty, x_2, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}) - \\ &- F_{m+2}(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}, \infty) + F_{m+2}(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}, x_{m+2}) = \\ &= F_m(x_2, \dots, x_{m+1}) - F_{m+1}(x_2, \dots, x_{m+2}) - F_{m+1}(x_1, \dots, x_{m+1}) + \\ &+ F_{m+2}(x_1, \dots, x_{m+2}) \quad (5) \end{aligned}$$

Låt oss nu införa Markov-villkoret och anta att den betraktade avrinningsprocessen är en Markov-process av ordning n . Vi förutsätter vidare att den kumulativa fördelningsfunktionen F_n är känd. Fördelningsfunktioner för $s > n$ kan då erhållas med följande formel:

$$F_s(x_1, \dots, x_s) = F_n(x_1, \dots, x_n) \frac{F_n(x_2, \dots, x_{n+1})}{F_{n-1}(x_2, \dots, x_n)} \times \dots \times \frac{F_n(x_{s-n+1}, \dots, x_s)}{F_{n-1}(x_{s-n+1}, \dots, x_{s-1})} \quad (6)$$

Vi förenklar nu problemet och sätter alla x_i lika med värdet x och vidare inför vi den kortare beteckningen $\phi_s(x)$ för den s -variata kumulativa fördelningsfunktionen. Ekvation (6) kan då skrivas

$$\phi_s(x) = \phi_n(x) \left[\frac{\phi_n(x)}{\phi_{n-1}(x)} \right]^{s-n} \quad (6a)$$

Beroende på förhållandet på längden $m+2$ av det betraktade intervallet och ordningen n av Markov-processen erhålles tre varierande uttryck för ϕ :

1. $m+2 < n$:

$$\phi = \phi_n(x) - 2\phi_{m+1}(x) + \phi_{m+2}(x) \quad (7)$$

2. $m+1 = n$:

$$\phi = \{\phi_{n-1}(x) - \phi_n(x)\}^2 / \phi_{n-1}(x) \quad (8)$$

3. $m \geq n$:

$$\phi = \frac{\{\phi_{n-1}(x) - \phi_n(x)\}^2}{\phi_{n-1}(x)} \left[\frac{\phi_n(x)}{\phi_{n-1}(x)} \right]^{m-n+1} \quad (9)$$

Tabell 1. Statistiska parametrar för observationsserier över årlig avrinning.

OBS. PKT		PERIOD	MQ m^3/s	σ m^3/s	CV	ρ_1
1 - 3	Jukkasjärvi	1915 - 67	101.8	12.5	0.12	-0.06
1 - 589	Kallio	1911 - 72	159.4	30.2	0.19	0.22
1 - 959	N Abiskojokk	1915 - 73	63.3	9.7	0.15	0.12
4 - 10	Fjällåsen	1917 - 67	44.2	5.5	0.12	0.10
4 - 18	Mojärv	1917 - 57	291.2	40.9	0.14	0.25
7 - 20	Niemisel	1902 - 72	39.3	9.0	0.23	0.26
28 - 56	Sorsele	1910 - 74	122.4	19.0	0.16	0.15
28 - 444	Hällbacken	1910 - 73	39.8	7.1	0.18	0.19
28 - 1302	Degerfors	1911 - 49	179.7	28.6	0.16	0.13
38 - 862	Rörström	1913 - 51	37.1	7.0	0.19	0.10
40 - 1328	Ö Norn	1941 - 74	65.8	11.2	0.17	0.03
42 - 97	Gimdalsby	1910 - 26	18.5	5.1	0.28	-0.06
42 - 97	" "	1932 - 73	17.3	4.6	0.27	0.08
42 - 826	Storsjö	1916 - 63	20.7	3.9	0.19	-0.06
42 - 829	Fotingen	1916 - 69	43.4	7.3	0.17	-0.05
48 - 106	Sveg	1914 - 67	123.3	23.5	0.19	0.07
48 - 107	Ljusdal	1909 - 67	173.5	35.1	0.20	0.03
53 - 121	Norslund	1852-1919	347.6	83.5	0.24	0.07
61 - 563	Vattholm	1917 - 73	2.17	0.70	0.32	0.32
74 - 177	Järnforsen	1901 - 60	15.12	4.89	0.32	0.33
75 - 855	Getebro	1920 - 74	9.91	3.15	0.32	0.21
K86/87-736	Hålabäck	1928 - 74	31.84 ^x	9.82 ^x	0.31	0.16
88 - 187	Hönjebro	1900 - 50	23.25	5.41	0.23	0.16
88 - 1069	Möckeln	1922 - 74	9.00	2.95	0.33	0.35
96 - 1008	N Forsmöllan	1928 - 69	10.08	2.48	0.25	0.19
98 - 219	Åshult	1909 - 50	64.35	15.37	0.24	0.24
100 - 1207	Gårdsilt	1928 - 74	1.28	0.27	0.21	0.09
101 - 224	Johansfors	1900 - 50	38.0	7.92	0.21	0.09
105 - 227	Åsbro	1909 - 74	32.9	9.22	0.28	0.15
108 - 243	Sjötorp	1807-1937	543.5	92.24	0.17	0.48
108 - 274	Edebäck	1910 - 74	131.0	28.9	0.22	-0.02
108 - 887	Solveden	1898 - 48	14.6	3.50	0.24	0.06

 $x = 1/s$

Låt oss nu se på specialfallen $n = 1$ och $n = 2$. Vi erhåller följande samband:

$$n = 1 : \phi_{n-1}(x) = 1, \phi_n(x) = F_1(x)$$

$$\phi = \{1 - F(x)\}^2 F(x)^m \quad \text{för alla } m \quad (10)$$

$$n = 2 : \phi_{n-1}(x) = F_1(x), \phi_n(x) = F_2(x, x)$$

$$\phi = \frac{\{F_1(x) - F_2(x, x)\}^2}{F_1(x)} \left[\frac{F_2(x, x)}{F_1(x)} \right]^{m-1} \quad \text{för alla } m \quad (11)$$

I våra fortsatta beräkningar skall vi inskränka oss till dessa två senare fall. Vi måste också göra antagande om vilken analytisk fördelningsfunktion som är tillämpbar för årlig avrinning. Då vi också använder den bivariata fördelningsfunktionen är det ändamålsenligt att använda normalfördelningen eller transformationer av denna. En undersökning på 35 (tabell 1) relativt långa avrinningsserier gav att hypotesen att dessa serier härrör från normalfördelningen inte i något fall kunde förkastas utifrån ett χ^2 -test på 95 % nivå.

Vi har tidigare accepterat att använda standardiserade värdet av avrinningen X (ekv. 2). $F_1(x)$ och $F_2(x, x)$ ges därmed av följande uttryck.

$$F_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-z^2/2) dz \quad (12)$$

$$F_2(x, x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(z_1^2 - 2\rho z_1 z_2 + z_2^2)\right\} dz_1 dz_2 \quad (13)$$

där ρ är autokorrelationskoefficienten mellan årsavrinningen under två på varandra följande år. Ekv (12) finns tabulerade i standardverk över matematisk statistik. Vi kan också använda serieutvecklingar av ekv (12) (Abramowitz och Stegun 1965). Ekv (13) finns inte direkt tabulerad utan endast en hjälp-

funktion, ur vilken värdet för någon viss nivå x av den bivariata normalfördelningen kan beräknas (se ex.vis. Owen 1962).

Beräknade sannolikheter för uppträdande av exakt ett, två, tre, fyra och fem lågvattenår i följd som funktion av den standardiserade nivån x redovisas i fig. 2-5. Beräkningarna har gjorts för värdena 0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 på korrelationskoefficienten, vilket är det intervall inom vilket korrelationskoefficienter, beräknade från observerade årsserier faller. X är negativt vilket innebär att beräkningen gäller endast för värden mindre än medelvärdet. Sannolikheterna är angivna i procent.

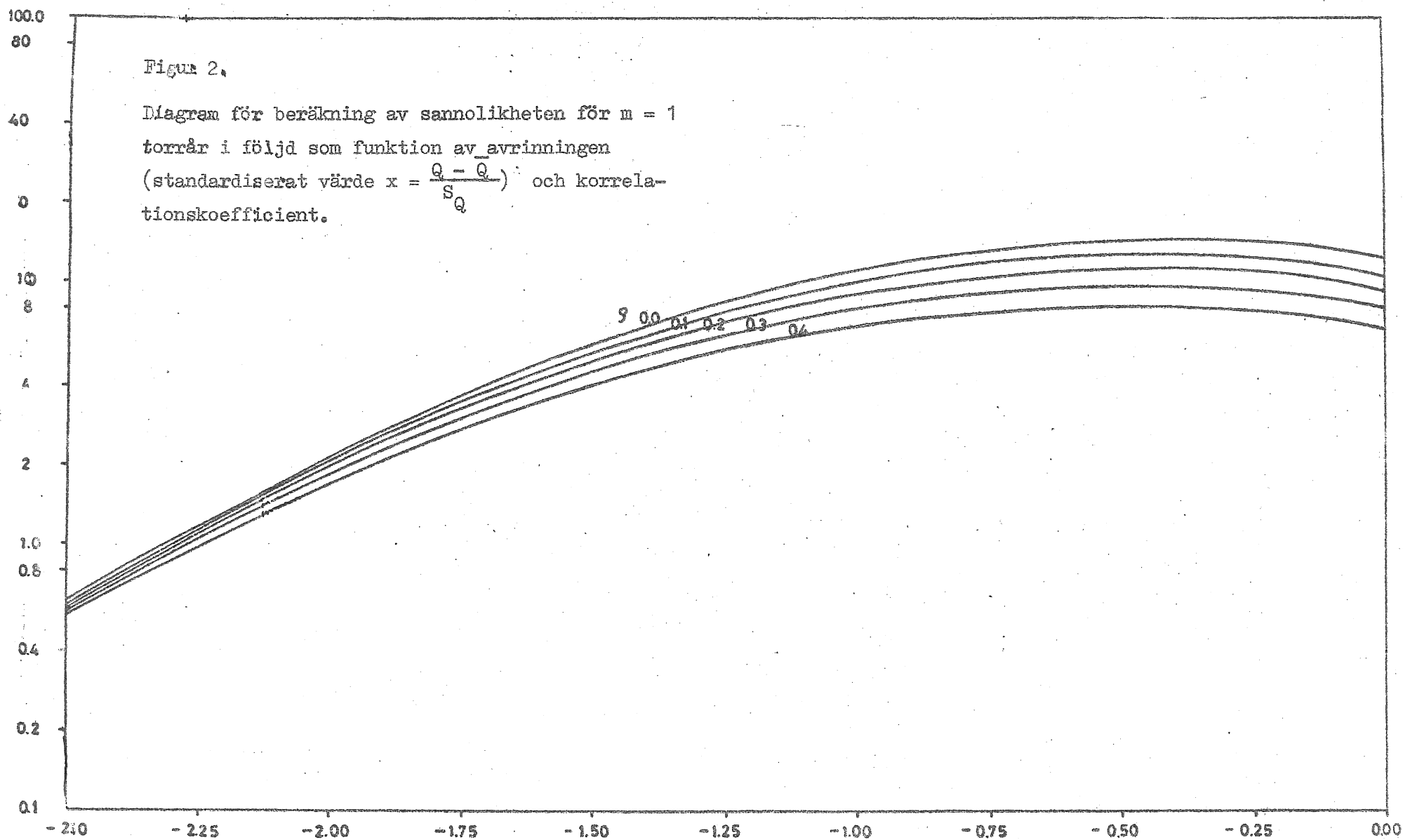
Medelvärden, standardavvikelser och korrelationskoefficienter för årsmedelvärden på avrinning för ett antal punkter finns redovisas i tabell 1. För en vald nivå Q kan vi så beräkna det motsvarande standardiserade värdet enligt ekv (12) och med detta och den beräknade korrelationskoefficienten kan sannolikheterna för gruppering av torrår uppskattas ur fig. 2-6. Låt oss som exempel beräkna sannolikheten att vi vid pegel 28-1302 skall observera en följd av tre år då avrinningen är mindre än $150 \text{ m}^3/\text{s}$. För denna pegel har vi beräknat medelvärdet till $\bar{Q} = 179.7 \text{ m}^3/\text{s}$ och standardavvikelsen till $s = 28.6 \text{ m}^3/\text{s}$ och korrelationskoefficienten till 0.13. Det till $150 \text{ m}^3/\text{s}$ svarande standardiserade värdet blir så enligt formel (2) $(150 - 179.7) / 28.6 = -1.038$. Vi använder nu Fig. 4 och våra ingångsvärden är $X = -1.038$ och $\rho = 0.13$ och finner den sökta sannolikheten vara 0.33 % dvs. 1 chans på 300.

Vi skall notera att de tre parametrarna som skattas från observerade serier är behäftade med statistiska fel. Genom att använda dessa skattade värden för vi in en osäkerhet vid beräkningen av frekvensen av torrår. Denna osäkerhet måste vi acceptera. Vi kan något minska den genom att grunda våra beräkningar på ett flertal långa observationsserier, inom en hydrologiskt homogen region.

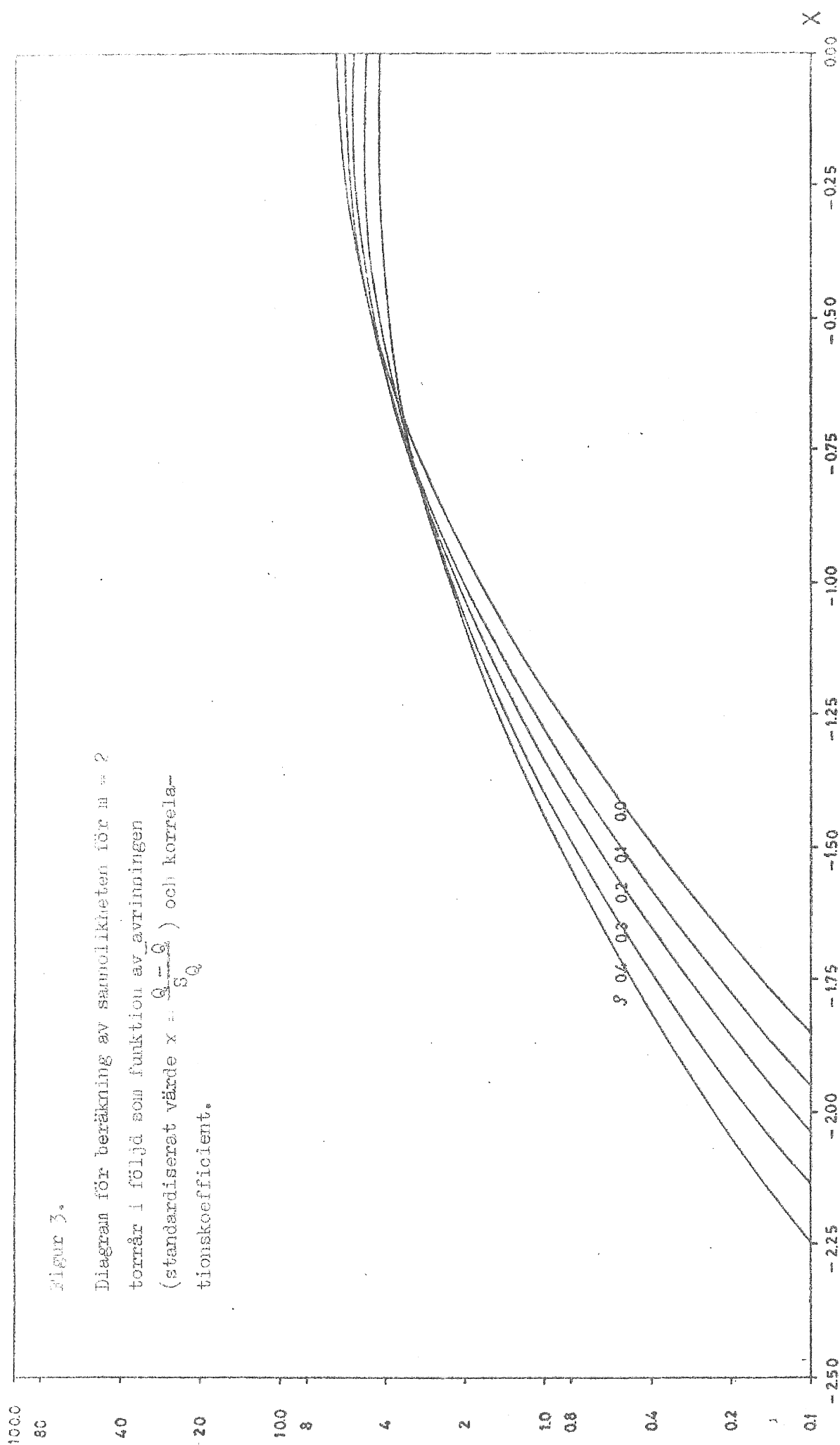
sannolikhet Φ i %

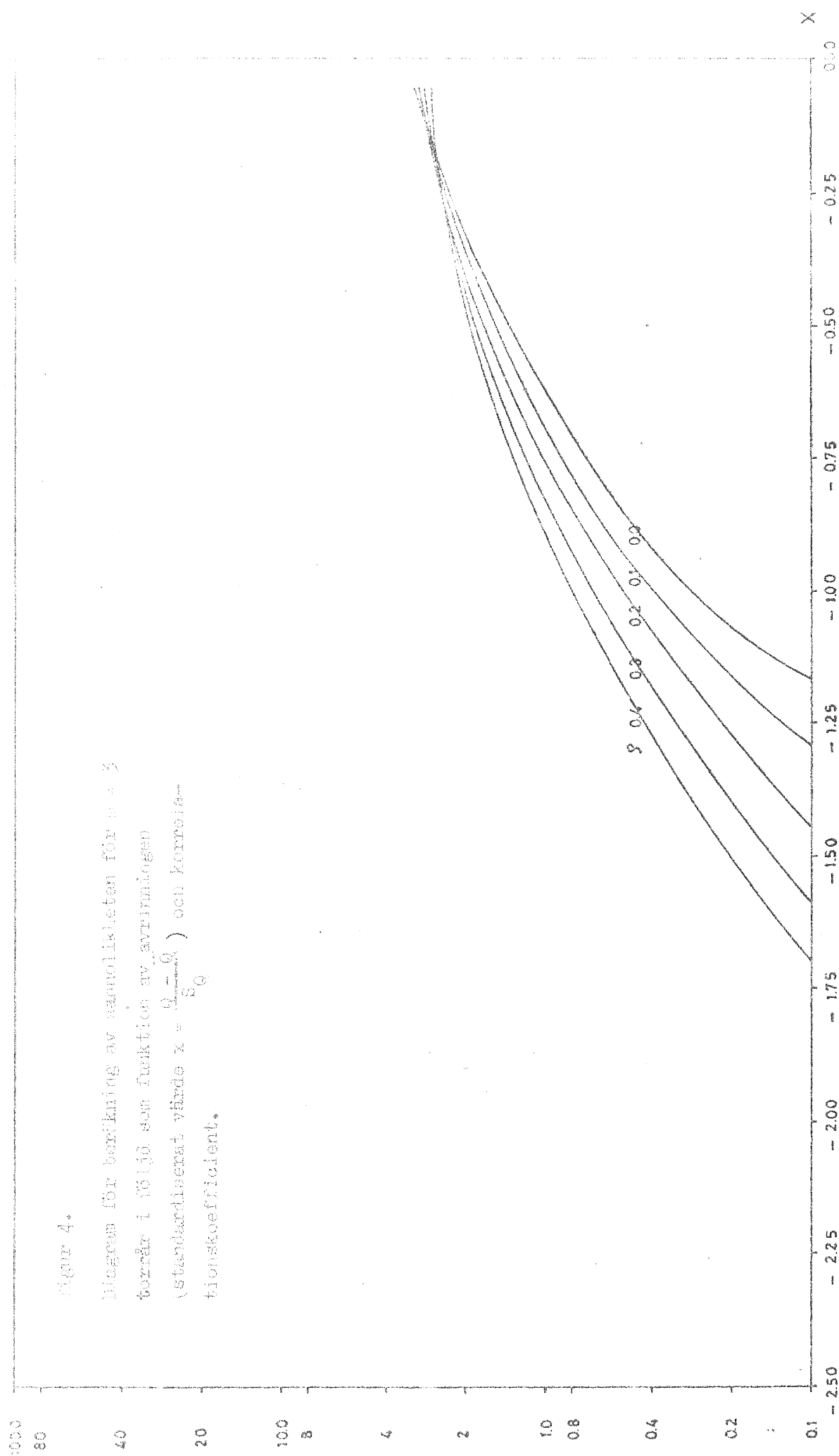
Figur 2.

Diagram för beräkning av sannolikheten för $m = 1$
torrår i följd som funktion av avrinningen
(standardiserat värde $x = \frac{Q - \bar{Q}}{S_Q}$) och korrela-
tionskoefficient.



sannolikhet Φ i %

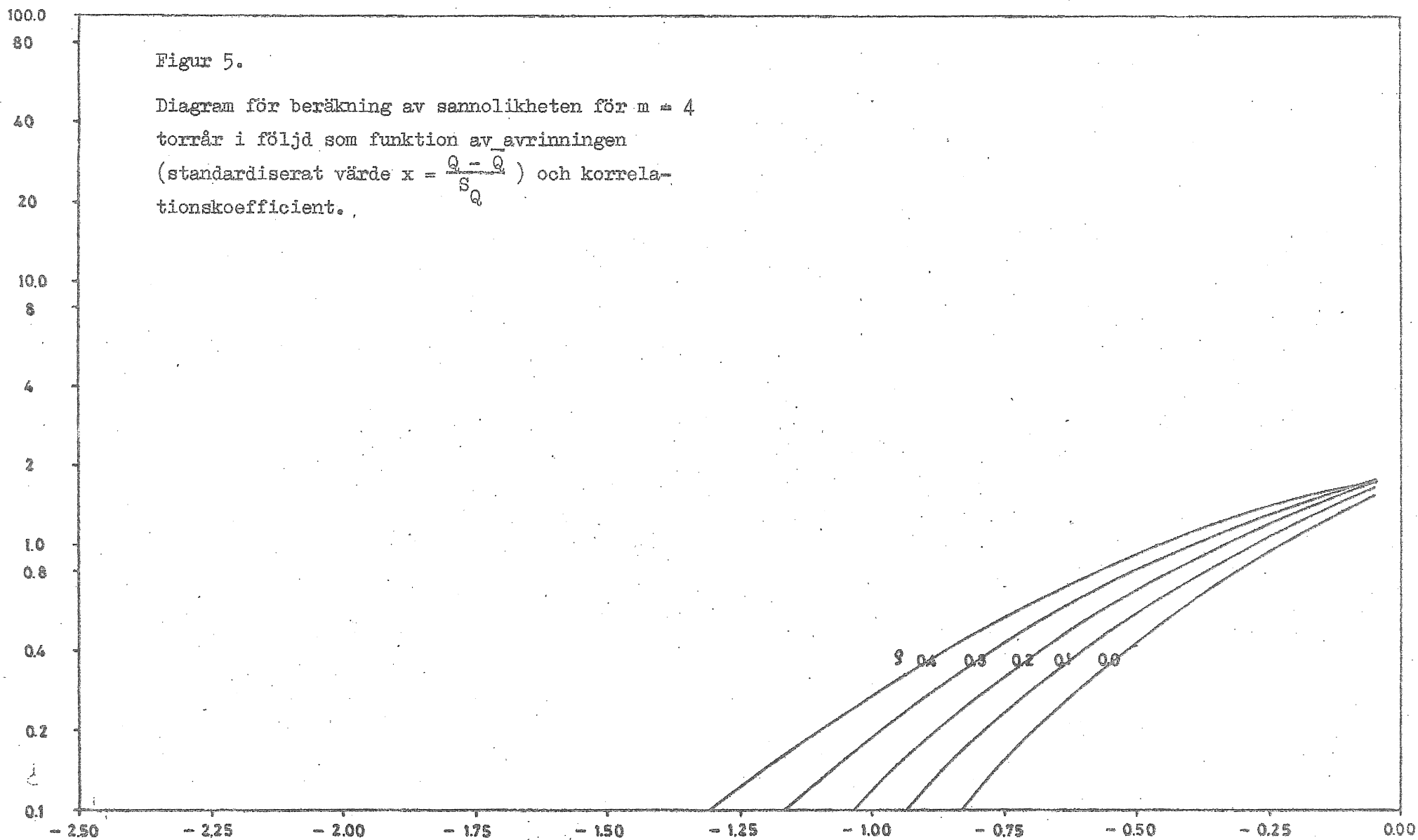




sannolikhet Φ i %

Figur 5.

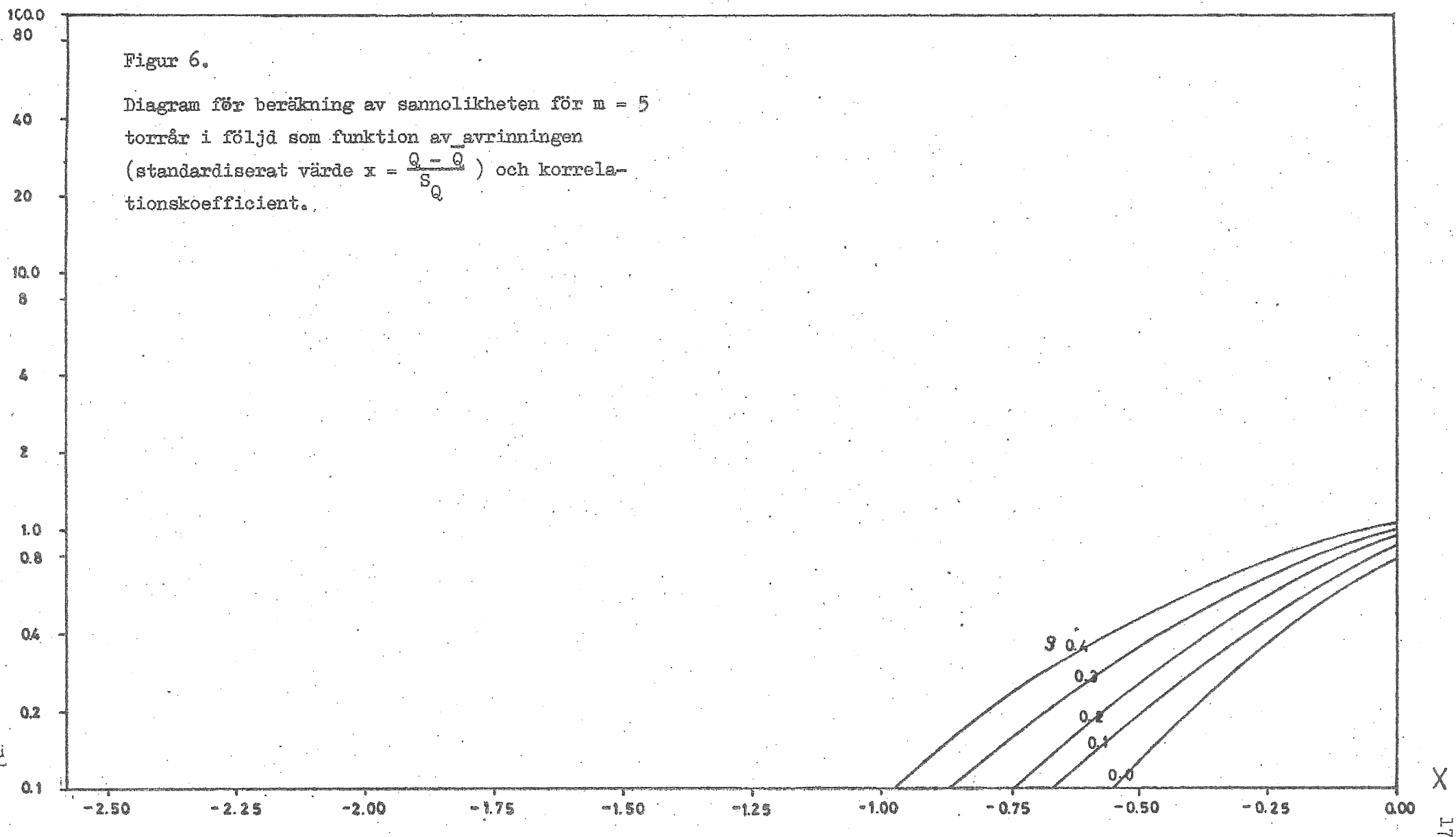
Diagram för beräkning av sannolikheten för $m = 4$
torrår i följd som funktion av avrinningen
(standardiserat värde $x = \frac{Q - \bar{Q}}{S_Q}$) och korrela-
tionskoefficient.



sannolikhet Φ i %

Figur 6.

Diagram för beräkning av sannolikheten för $m = 5$
torrår i följd som funktion av avrinningen
(standardiserat värde $x = \frac{Q - \bar{Q}}{S_Q}$) och korrela-
tionskoefficient.



4. Sannolikheten för gruppering av torrår, diskret modell

Vi betraktar här årsavrinningsprocessen som en Markov-kedja $X(t)$, $t = 1, 2, \dots$ dvs en diskret stokastisk process med diskret tid som uppfyller Markov-villkoret (ekv. 1) för $n = 2$. Vi skall använda en mycket enkel process med endast två tillstånd torrår "0" och icke torrår "1". En realisering av denna Markov-kedja kan se ut så här:

tid (år)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
tillstånd	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	...

Sannolikheten att processen vid tidpunkten $t = n$ är i ett visst tillstånd skriver vi:

$$p_i^n = P\{X(n) = i\}, \quad i = 0, 1,$$

och detta kallas för en absolut sannolikhet. Det gäller naturligtvis att:

$$p_0^n + p_1^n = 1.$$

Av betydelse är också sannolikheter av typen

$$p_{ij}^n(n) = P\{X(n) = i | X(n-1) = j\} \quad i, j = 0, 1.$$

En sådan sannolikhet kallas övergångssannolikhet och anger alltså den betingade sannolikheten för att processen skall vara i tillståndet i vid $t = n$ om den var i tillstånd j vid $t = n - 1$. Vi skall förutsätta att kedjan är tidshomogen, varmed menas att övergångssannolikheterna inte beror av n . Vi kan alltså skriva $p_{ij}^n(n) = p_{ij}$.

Matrisen

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

kallas övergångsmatrisen. Radsummorna $\sum_{j=0}^1 p_{ij}$ i denna är alltid 1.

Vi skriver nu övergångsmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \beta & \beta \\ \alpha & 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

Vi kan visa (se t.ex. Blom, 1968) att de absoluta sannolikheterna efter att vi observerat processen under en längre tid är

$$p_0 = \alpha / (\alpha + \beta), \quad p_1 = \beta / (\alpha + \beta)$$

Vi definierar liksom tidigare torrår som ett år då X underskrider någon viss nivå x . Med utnyttjande av kumulativa fördelningsfunktioner (se föregående avsnitt) kan vi ange övergångssannolikheterna och absoluta sannolikheterna på följande sätt:

$$p_0 = F(x) \quad (14)$$

$$p_1 = 1 - F(x) \quad (15)$$

$$p_{00} = \frac{F(x, x)}{F(x)} \quad (16)$$

$$p_{01} = \frac{F(x) - F(x, x)}{F(x)} \quad (17)$$

$$p_{10} = \frac{F(x) - F(x, x)}{1 - F(x)} \quad (18)$$

$$p_{11} = \frac{1 + F(x, x) - 2 F(x)}{1 - F(x)} \quad (19)$$

Vi har förutsatt att den bivariata fördelningen $F(x, x)$ är symmetrisk vid härledningen av formlerna ovan.

Vi väljer först sannolikhetsnivån 50 % som för normalfördelningen ger gränsen för det standardiserade värdet lika med 0.0, vilket är det samma som medelvärdet för ursprungliga avrinningen. Händelsen "0", dvs torrår, säger vi inträffar om observerad avrinning är mindre än medelvärdet eller vilket är likvärdigt att det standardiserade värdet är mindre än noll. Övergångssannolikheterna för olika värden på korrelationskoefficienten finns redovisade i tabell 2 beräknade enligt ekvationerna (16) - (19). De absoluta sannolikheterna är också angivna. Vi ser att med ökad korrelationskoefficient får vi ökad benägenhet att processen behåller sitt förutvarande tillstånd.

Vi väljer nu p.s.s. sannolikhetsnivån 25 % som motsvarar det standardiserade värdet -0.675 och kan beräkna motsvarande övergångssannolikheter som ovan och dessa finns redovisade i tabell 3.

Tabell 2.

Teoretiska absoluta sannolikheter och övergångssannolikheter för sannolikhetsnivån 50 %.

korrelations- koefficient	Sannolikhet					
	p_0	p_1	p_{00}	p_{01}	p_{10}	p_{11}
-0.10	0.5	0.5	0.469	0.531	0.531	0.469
-0.05			0.486	0.514	0.514	0.486
0.00			0.500	0.500	0.500	0.500
0.05			0.516	0.484	0.484	0.516
0.10			0.533	0.467	0.467	0.533
0.15			0.548	0.452	0.452	0.548
0.20			0.563	0.437	0.437	0.563
0.25			0.582	0.418	0.418	0.582
0.30			0.599	0.401	0.401	0.599
0.35			0.615	0.385	0.385	0.615
0.40			0.633	0.367	0.367	0.633

Tabell 3.

Teoretiska absoluta sannolikheter och övergångssannolikheter för sannolikhetsnivån 25 %.

korrelations- koefficient	Sannolikhet					
	p_0	p_1	p_{00}	p_{01}	p_{10}	p_{11}
0.00	0.25	0.75	0.250	0.750	0.250	0.750
0.05			0.268	0.732	0.244	0.756
0.10			0.291	0.709	0.236	0.764
0.15			0.310	0.690	0.230	0.770
0.20			0.331	0.669	0.223	0.777
0.25			0.358	0.642	0.214	0.786
0.30			0.386	0.614	0.205	0.795
0.35			0.405	0.595	0.198	0.802
0.40			0.430	0.570	0.190	0.810

Observationsserierna, redovisade i tabell 1 kan vi överföra till Markov-kedjor av de slag som visats ovan. Vi väljer som tidigare nivåerna 50 % och 25 % och får därmed fram de kedjor som finns visade i tabellerna 4 och 5. Ur dessa observerade kedjor kan vi skatta övergångssannolikheter och absoluta sannolikheter och dessa är givna i tabellerna 6 och 7. Medelvärden över dessa sannolikheter är också givna för norra respektive södra Sverige. Variationerna i de beräknade sannolikheterna är i första hand statistiskt betingade. En uppfattning om storleken på det rent statistiska variationsområdet för de absoluta sannolikheterna kan vi få genom att utnyttja de Moivre-Laplace integralteorem.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ a < \frac{\frac{m}{n} - p}{\frac{pq}{n}} < b \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-z^2/2} dz \quad (20)$$

95 % konfidensgränser för sannolikheterna $p = 0.5$ och 0.25 med $n = 30, 40, 50, 60, 70$ finns redovisade i tabell 8. För en Markov-kedja kan vi utnyttja en generalisering av gränsvärdesteomet ovan:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ a < \frac{\frac{m}{n} - p}{\frac{pq(1 - \beta + 1 - \alpha)}{n(\beta + \alpha)}} < b \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-z^2/2} dz \quad (21)$$

Konfidensgränser för detta fall är givna i tabell 9 men nu som funktion av korrelationskoefficienten. Vi ser att med högre korrelationskoefficient ökar konfidensintervallet, dvs osäkerheten blir större vid skattning av sannolikheten p .

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	012345678901234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890									
1 - 3			000001110010000000101100100001001011001110011101011101							
1 - 589			110000000011111101000110111000100100001101110101100100111100000							
1 - 959			00100111101100100111100100001011011000100001101011100000011							
4 - 10			000111011010110111110101001110001101110011001011000							
4 - 18			00011111101010010111010000100000100111101							
7 - 20	11011000101000000011111100101011011110100110100000111101000100010100000									
28 - 56		000000000101110110101111011101000011110011001000110010010110001111								
28 - 444		00000000000111011010111111110100001111001100100011001001001000111								
28 - 1302		0000000000111011010111001110111101110011								
38 - 862		000000011011111010100011010000111101110								
40 - 1328			0111110111011001110011011000001010							
42 - 97		00010010101111101	000110100100111000101100110011100011001000							
42 - 826		111000011011010110110110001111100100010001101100								
42 - 829		111000111011010000111010000111000110010001001100001100								
48 - 106		001010000110110101001111100000111000100100010011000111								
48 - 107		10000001010101110110101001111100000111000110100010011100111								
53 - 121			110000001101001111001100010101110100001000111111							
	000000001011010001000									
61 - 563		01100111001100100111100100111100000001011111100111100000								
74 - 177	111110110101101110000011001100100001000000001100011101001100									
75 - 855		0001101110110001100000001110101110000010110000111110001								
86/87 - 736		10110001110100101000001100110011110001111110000								
88 - 187	100110000010111011101001100110110001100000011110001									
88 - 1069		01100110110000100000011110001100110111011000111010000								
96 - 1008		101110011000001111100011101100100111001100								
98 - 219	11111101011001100110110001100000011110101									

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100 -1207										
101 - 224										
105 -1640										
108 - 243										
108 - 274										
108 - 887										

Table 4. forts.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890123456789									
1 - 3				00111111111111111110101011011011001110111101011101						
1 - 589				1100001111100111111111101110101001111011111111101111111000						
1 - 959				1011111111111111111111101111111011001110111101011101100111						
4 - 10				0001110111111111111110101001111001101111011011011101						
4 - 18				101111111111111110111010100111001101111101						
7 - 20		1111101101100010111111111111011111010111010111111101101110011100000								
28 - 56		10011000101111111110111111111111011110111011100110110011110001111								
28 - 444		10011000101110111101111111111110101111011101110011001011111100111								
28 - 1302		00100001011101111111111011101111111111011								
38 - 862		1000111111111111111100011010000111101111								
40 - 1328					1111110111011011110011011110001110					
42 - 97		10110010101111111		10011010011011101011111110111101111001110						
42 - 826			111011111111011111111110111111101100110011101110							
42 - 829			111001111011010110111110011111101110110111101111111100							
48 - 106			00111010111011111110011111101011111011110100111011111111							
48 - 107			11011001110101110111111001111110001111011110110110011101111							
53 - 121							110101001111101111101100111101111100111111111111			
	00110011011011011110									
61 - 563			11110111011111111011111110111111000100110111111100111111000							
74 - 177		111111111111111111110011011111100001100000111101011111101111								
75 - 855			1011101111110101110010011110101110111111111001111110001							
86/87 - 736				101110111101101111101011101101111111001111110001						
88 - 187	1001110111111111111111001101110110001100000011110101									
88 - 1069			0110111111000110000001111010111111111011101111011001							
96 - 1008			10111001110011111101111101101101111011110							
98 - 219		111111111111001101111110001100100011110111								

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100 - 1207	111110111010101111101111111111101111111011111									
101 - 224	100111011111111011111001101111110011101110111110111									
105 - 1640	1111110111111011111111110011101110011110011									
108 - 243	0000011011110011111111111111111111100111111110000001111101111101111011100111110001110111111									
	10011001111111001110100011011111100111									
108 - 274	10110111101011111111111011111110011110									
108 - 887										
	1111110101111110111110011001111110111011100111101									

11

Tabell 6. Beräknade absoluta sannolikheter och övergångssannolikheter för sannolikhetsnivån 50 %.

Pegel	p_{00}	p_{01}	p_{10}	p_{11}	p_0	p_1
1 - 3	0.576	0.424	0.556	0.444	0.571	0.489
1 - 589	0.615	0.385	0.439	0.561	0.534	0.466
1 - 959	0.572	0.428	0.520	0.480	0.548	0.452
4 - 10	0.409	0.591	0.464	0.536	0.429	0.571
4 - 18	0.550	0.450	0.474	0.527	0.513	0.487
7 - 20	0.560	0.440	0.508	0.492	0.536	0.464
28 - 56	0.554	0.446	0.460	0.540	0.508	0.492
28 - 444	0.627	0.373	0.424	0.576	0.532	0.468
28 - 1302	0.572	0.428	0.366	0.634	0.409	0.591
38 - 862	0.594	0.406	0.406	0.594	0.500	0.500
40 - 1328	0.428	0.572	0.421	0.579	0.424	0.576
42 - 97	0.533	0.467	0.538	0.462	0.536	0.464
42 - 826	0.489	0.511	0.469	0.531	0.479	0.521
42 - 829	0.621	0.379	0.500	0.500	0.569	0.431
48 - 106	0.567	0.433	0.522	0.478	0.547	0.453
48 - 107	0.533	0.467	0.500	0.500	0.517	0.483
53 - 121	0.632	0.368	0.517	0.483	0.585	0.415

Tabell 6. forts.

Pegel	p_{00}	p_{01}	p_{10}	p_{11}	p_0	p_1
61 - 563	0.630	0.370	0.345	0.655	0.482	0.518
74 - 177	0.625	0.375	0.481	0.519	0.562	0.438
75 - 855	0.633	0.367	0.417	0.583	0.532	0.468
88 - 187	0.593	0.407	0.478	0.522	0.540	0.460
88 - 1069	0.607	0.393	0.458	0.542	0.538	0.462
96 - 1008	0.579	0.421	0.409	0.591	0.493	0.507
98 - 219	0.474	0.526	0.455	0.545	0.463	0.537
100 - 1207	0.571	0.429	0.360	0.640	0.457	0.543
101 - 224	0.607	0.393	0.500	0.500	0.560	0.440
105 - 227	0.600	0.400	0.381	0.619	0.488	0.512
108 - 243	0.653	0.347	0.340	0.660	0.495	0.505
108 - 274	0.526	0.474	0.556	0.444	0.540	0.460
108 - 8863	0.643	0.357	0.500	0.500	0.583	0.417
K86187-736	0.609	0.391	0.435	0.565	0.526	0.474
Medelvärde för Norra Sverige	0.552	0.448	0.486	0.514	0.518	0.482
σ	0.059	0.059	0.057	0.057	0.049	0.049
Medelvärde för Södra Sverige	0.598	0.402	0.435	0.565	0.519	0.481
σ	0.043	0.043	0.51	0.051	0.039	0.039

Tabell 7. Beräknade absoluta sannolikheter och övergångssannolikheter
för sannolikhetsnivån 25 %.

Pegel	p_{00}	p_{01}	p_{10}	p_{11}	p_0	p_1
1 - 3	0.154	0.846	0.256	0.744	0.233	0.767
1 - 589	0.467	0.533	0.196	0.804	0.268	0.732
1 - 959	0.182	0.818	0.191	0.809	0.190	0.810
4 - 10	0.267	0.733	0.286	0.714	0.280	0.720
4 - 18	0.200	0.800	0.267	0.733	0.250	0.750
7 - 20	0.368	0.632	0.255	0.745	0.288	0.712
28 - 56	0.389	0.611	0.239	0.761	0.281	0.719
28 - 444	0.316	0.684	0.295	0.705	0.302	0.698
28 - 1302	0.364	0.636	0.222	0.778	0.259	0.741
38 - 862	0.583	0.417	0.192	0.808	0.316	0.684
40 - 1328	0.333	0.667	0.292	0.708	0.304	0.696
42 - 97	0.235	0.765	0.350	0.650	0.314	0.686
42 - 826	0.222	0.778	0.211	0.789	0.213	0.787
42 - 829	0.231	0.769	0.275	0.725	0.263	0.737
48 - 106	0.214	0.786	0.256	0.744	0.246	0.754
48 - 107	0.294	0.706	0.293	0.707	0.293	0.707
53 - 121	0.278	0.722	0.286	0.714	0.283	0.717

Tabell 7. forts.

Nivå 25 %

Pegel	p_{00}	p_{01}	p_{11}	p_{11}	p_0	p_1
61 - 563	0.429	0.571	0.214	0.786	0.273	0.727
74 - 177	0.533	0.467	0.159	0.841	0.254	0.746
75 - 855	0.313	0.688	0.289	0.711	0.296	0.704
88 - 187	0.500	0.500	0.281	0.719	0.360	0.640
88 - 1069	0.444	0.556	0.265	0.735	0.323	0.677
96 - 1008	0.200	0.800	0.290	0.710	0.266	0.734
98 - 219	0.500	0.500	0.207	0.793	0.293	0.707
100 - 1207	0.000	1.000	0.179	0.821	0.152	0.848
101 - 224	0.250	0.750	0.237	0.763	0.240	0.760
105 - 227	0.333	0.667	0.188	0.813	0.220	0.780
108 - 243	0.484	0.516	0.231	0.769	0.309	0.691
108 - 274	0.143	0.857	0.233	0.767	0.214	0.786
108 - 887	0.250	0.750	0.237	0.763	0.240	0.760
K86/87-736	0.231	0.769	0.303	0.697	0.283	0.717
Medelvärde för Norra Sverige	0.293	0.707	0.254	0.746	0.266	0.734
σ	0.108	0.108	0.041	0.041	0.035	0.035
Medelvärde för Södra Sverige	0.331	0.669	0.237	0.763	0.267	0.733
σ	0.150	0.150	0.046	0.046	0.051	0.051

Tabell 8. 95 % konfidensgränser för skattade sannolikheter för
oberoende process (ekv. 20)

P_0	a	b	antal år n
0.5	0.321	0.679	30
0.5	0.343	0.655	40
0.5	0.361	0.639	50
0.5	0.373	0.627	60
0.5	0.383	0.617	70
0.25	0.095	0.405	30
0.25	0.116	0.384	40
0.25	0.130	0.370	50
0.25	0.140	0.360	60
0.25	0.149	0.351	70

Tabell 9. 95 % - konfidensgränser för skattade sannolikheter för beroende process (ekv. 21)

p_0	$\rho = 0.10$		$\rho = 0.20$		$\rho = 0.30$		$\rho = 0.40$		antal år
	a	b	a	b	a	b	a	b	n
0.5	0.309	0.691	0.297	0.703	0.281	0.719	0.265	0.735	30
0.5	0.334	0.666	0.324	0.676	0.311	0.689	0.296	0.704	40
0.5	0.352	0.648	0.343	0.657	0.331	0.669	0.318	0.682	50
0.5	0.365	0.635	0.356	0.644	0.345	0.655	0.334	0.666	60
0.5	0.375	0.625	0.367	0.633	0.357	0.643	0.346	0.654	70
0.25	0.086	0.414	0.077	0.423	0.064	0.436	0.052	0.448	30
0.25	0.108	0.392	0.100	0.400	0.089	0.411	0.079	0.421	40
0.25	0.123	0.377	0.116	0.384	0.106	0.394	0.097	0.403	50
0.25	0.134	0.366	0.128	0.372	0.118	0.382	0.110	0.390	60
0.25	0.143	0.357	0.137	0.363	0.128	0.372	0.120	0.380	70

Med konfidensgränserna i tabellerna 8 och 9 som bakgrund kan vi genast konstatera att utifrån individuella serier kan vi ej förkasta den uppställda teoretiska modellen representerad av ekvationerna (14) - (19). Från det totala observationsmaterialet kan vi möjligen finna några avvikande tendenser. Ganska genomgående är den skattade absoluta sannolikheten för p_0 större än de teoretiska värdena 0.25 resp 0.50. Detta innebär att fördelningen av årsvärden skulle ha en positiv skevhet. En ytterligare tendens, men dock svagare, är en osymmetri i sannolikheterna så att "minnet" i tillståndet "0" är större än i tillståndet "1". Denna tendens är starkast för södra Sverige. För korrelationskoefficienten skulle detta således innebära att den varierade med flödets storlek, större vid lägre flöden.

Vi kan slutligen beräkna sannolikheten Φ för uppkomsten av en period av m år i tillståndet "0" (fig. 1). Denna ges av

$$\Phi = p_1 p_{00} (p_{00})^{m-1} p_{01} \quad (22)$$

Insättning av sambanden (14) - (19) i denna ekvation ger oss tillbaka formel (11). De teoretiska sannolikheterna, som direkt motsvarar de värden som kan tas fram ur figurerna 2 - 6 för $x_1 = 0$ och -0.6745 respektive, är visat i tabell 10. Motsvarande sannolikheter beräknade från skattade värden från observationsserier är givna i tabellerna 11 och 12. Individuella värden är naturligtvis osäkra. Medelvärden för norra resp. södra Sverige finns också angivna. Dessa kan väl anses motsvara teoretiska värden.

Tabell 10. Teoretiska sannolikheter för uppkomst av m år i följd av tillstånd P_0 .

P_0	ρ	m				
		1	2	3	4	5
0.5	0.0	0.125	0.063	0.031	0.016	0.008
0.5	0.05	0.117	0.060	0.031	0.016	0.008
0.5	0.10	0.109	0.058	0.031	0.017	0.009
0.5	0.15	0.102	0.056	0.031	0.017	0.009
0.5	0.20	0.095	0.054	0.030	0.017	0.010
0.5	0.25	0.087	0.051	0.030	0.017	0.010
0.5	0.30	0.080	0.048	0.029	0.017	0.010
0.5	0.35	0.074	0.046	0.028	0.017	0.011
0.5	0.40	0.067	0.043	0.027	0.017	0.011
0.25	0.0	0.141	0.035	0.009	0.002	0.001
0.25	0.05	0.134	0.036	0.010	0.003	0.001
0.25	0.10	0.125	0.037	0.011	0.003	0.001
0.25	0.15	0.119	0.037	0.011	0.004	0.001
0.25	0.20	0.112	0.037	0.012	0.004	0.001
0.25	0.25	0.103	0.037	0.013	0.005	0.002
0.25	0.30	0.094	0.036	0.014	0.005	0.002
0.25	0.35	0.088	0.036	0.014	0.006	0.002
0.25	0.40	0.081	0.035	0.015	0.006	0.003

Tabell 11. Beräknade sannolikheter för uppkomsten av m är följd av tillstånd "0", $P_0 = 0.5$

vnr	pnr	1	2	3	4	5
1	3	0.115	0.066	0.038	0.022	0.013
1	589	0.079	0.048	0.030	0.018	0.011
1	959	0.101	0.058	0.033	0.019	0.011
4	10	0.157	0.064	0.026	0.011	0.004
4	18	0.104	0.057	0.031	0.017	0.010
7	20	0.104	0.058	0.033	0.018	0.010
28	56	0.101	0.056	0.031	0.017	0.010
28	444	0.074	0.046	0.029	0.018	0.011
28	1302	0.093	0.053	0.030	0.017	0.010
38	862	0.082	0.049	0.029	0.017	0.010
40	1328	0.139	0.059	0.025	0.011	0.005
42	97	0.117	0.062	0.033	0.018	0.009
42	826	0.125	0.061	0.030	0.015	0.007
42	829	0.082	0.051	0.031	0.020	0.012
48	106	0.125	0.071	0.040	0.023	0.013
48	106	0.102	0.058	0.033	0.019	0.011
48	107	0.113	0.060	0.032	0.017	0.009
53	121	0.079	0.050	0.032	0.020	0.013
61	563	0.066	0.042	0.026	0.017	0.010
74	177	0.079	0.049	0.031	0.019	0.012
75	855	0.072	0.045	0.029	0.018	0.011
K86/87	736	0.081	0.049	0.030	0.018	0.011
88	187	0.089	0.053	0.031	0.019	0.011
88	1069	0.083	0.050	0.031	0.019	0.011
96	1008	0.087	0.051	0.029	0.017	0.010
98	219	0.129	0.061	0.029	0.014	0.006
100	1207	0.084	0.048	0.027	0.016	0.009
101	224	0.086	0.052	0.032	0.019	0.012
105	227	0.078	0.047	0.028	0.017	0.010
108	243	0.060	0.039	0.025	0.017	0.011
108	274	0.121	0.064	0.034	0.018	0.009
108	886	0.074	0.048	0.031	0.020	0.013
Medelvärde för norra Sverige		0.105	0.057	0.031	0.018	0.010
σ		0.022	0.007	0.003	0.003	0.002
Medelvärde för södra Sverige		0.084	0.050	0.030	0.018	0.011
σ		0.015	0.004	0.002	0.002	0.002

Tabell 12. Beräknade sannolikheter för uppkomst av m år i följd av tillstånd "0", $P_0 = 0.25$

vnr	pnr	1	2	3	4	5
1	3	0.166	0.026	0.004	0.001	0.000
1	589	0.076	0.036	0.017	0.008	0.004
1	959	0.127	0.023	0.004	0.001	0.000
4	10	0.151	0.040	0.011	0.003	0.001
4	18	0.160	0.032	0.006	0.001	0.000
7	20	0.115	0.042	0.016	0.006	0.002
28	56	0.105	0.041	0.016	0.006	0.002
28	444	0.141	0.045	0.014	0.004	0.001
28	1302	0.105	0.036	0.012	0.004	0.001
28	1545	0.116	0.039	0.013	0.004	0.001
38	862	0.055	0.032	0.019	0.011	0.006
40	1328	0.136	0.045	0.015	0.005	0.002
42	97	0.184	0.043	0.010	0.002	0.001
42	826	0.129	0.029	0.006	0.001	0.000
42	829	0.146	0.034	0.008	0.002	0.000
48	106	0.152	0.032	0.007	0.001	0.000
48	107	0.146	0.043	0.013	0.013	0.001
53	121	0.148	0.041	0.011	0.003	0.001
61	563	0.089	0.038	0.016	0.007	0.003
74	177	0.055	0.030	0.016	0.008	0.004
75	855	0.140	0.044	0.014	0.004	0.001
K86/87	736	0.167	0.039	0.009	0.002	0.000
88	187	0.090	0.045	0.022	0.011	0.006
88	1069	0.100	0.044	0.020	0.009	0.004
96	1008	0.170	0.034	0.007	0.001	0.000
98	219	0.073	0.037	0.018	0.009	0.005
100	1207	0.152	0.000	0.000	0.000	0.000
101	224	0.135	0.034	0.008	0.002	0.001
105	227	0.098	0.033	0.011	0.004	0.001
108	243	0.082	0.040	0.019	0.009	0.005
108	274	0.157	0.022	0.003	0.000	0.000
108	887	0.135	0.034	0.008	0.002	0.001
Medelvärde för norra Sverige		0.132	0.047	0.011	0.004	0.001
σ		0.031	0.044	0.005	0.003	0.002
Medelvärde för södra Sverige		0.117	0.034	0.012	0.005	0.002
σ		0.036	0.011	0.006	0.004	0.002

5. Slutsater

Vi ska notera den paradoxala situation vi befinner oss i då vi betraktar en observerad serie över årlig avrinning som teoretiskt sett har en oändlig liten sannolikhet att realiseras. Genom att betrakta sannolikheter för under - resp. överskridande eller genom att bilda en diskret process får vi mätbara värden för sannolikheter för en viss realisering, men fortfarande är det mycket små tal vi rör oss med. Vi skall märka att relativt är sannolikheten för att observera en följd av "mera normala" år fullt jämförbar med en "mindre normal" följd. Låt oss exemplifiera detta med att beräkna sannolikheterna för de två realiseringarna av en Markov-kedja visade nedan. Vi använder nivån 25 % och förutsätter att korrelationskoefficienten mellan konsekutiva år är 0.20.

$$1: 1000001 \quad \text{Sannolikhet} \approx 1/745 \{p_{\perp} p_{10} p_{00}^5 p_{01}\}$$

$$2: 1010101 \quad \text{Sannolikhet} \approx 1/102 \{p_{\perp} (p_{10} p_{01})^3\}$$

Den nedre situationen är alltså endast ungefär dubbelt så frekvent som den övre.

Tabellerna 4 och 5 ger viss möjlighet att bedöma den rumsliga utbredningen av torrperioder. I tabellen 4 som visar perioder då årsavrinningen är över eller under medelvärdet, visar stor samstämmighet mellan olika observationsserier. Störst är denna för norra Sverige. Samma längre torrperioder är genomgående i stort sett för alla serier, även om längden kan variera något. Någon samstämmighet mellan norra

och södra Sverige kan ej spåras. Tabellen 5, årsavrinning större eller mindre Q25, ger en mera splittrad bild, vilket innebär att svårare torrperioder är mera lokala. Teoretiskt är det också så att extrema händelser är mindre korrelerade (Gottschalk och Krasovskaia, 1975).

Den föreslagna modellen, en lineär första ordningens markov modell, är mycket enkel i sin struktur. Som alla modeller utgör den en för-
enkling av verkligheten. Vi har redan noterat en tendens till osymmetri i övergångssannolikheterna så att "minnet" är större under torra perioder. Detta är ett fenomen som kan förklaras av icke lineära magasineringseffekter (Gottschalk, 1976). En allmän slutsats bör dock vara att den föreslagna beräkningsmetoden för att uppskatta sannolikhet av gruppering av torrår är den bästa möjliga på nuvarande kunskapsnivå, både vad gäller teoretiskt kunnande och information i form av observationsserier.

Litteratur:

Abramowitz M. och Stegun I.

Handbook of Mathematical Functions

Dover Publications New York 1965

Blom G.

Stokastiska processer

Kompendium Lund 1968

Gottschalk L. and Krasovskaia I.

Representativity of hydrological parameters

Vannet i Norden Nr 4. 1975

Gottschalk L.

Correlation structure and time scale

of simple hydrologic systems

To be published

Owen B.O.

Handbook of statistical tables

Reading, Massachusetts 1962

HYDROLOGISKA BYRÅN, HB RAPPORTER

Nr

1. Hydrologiska undersökningar i Kassjöans repr. område
Meddelande nr III
Vattenomsättningen i Lilla Tivsjöns område 1966/67-1972/73
av A Waldenström
Stockholm 1974
2. Hydrologiska undersökningar i Lappträskets repr. område
Meddelande nr IV: Nederbörd och vattenomsättning
av M Persson
Stockholm 1974
3. Oceanografiska observationer i Östersjön 1973 med kust-
bevakningens båtar samt från isbrytare
av U Ehlin & B Juhlin
Stockholm 1974
4. Oceanografiska undersökningar i Ålands Hav
Meddelande nr I: Mätningar juni-september 1973
av U Ehlin & C Ambjörn
Stockholm 1974
5. Verification of Heated Water Jet Numerical Model
by James G Weil
Stockholm 1974
6. Hydrologiska undersökningar i Lappträskets representativa
område. Meddelande nr V. Markvattenstudier
av T Milanov
Stockholm 1975
7. Hydrologiska undersökningar i Lappträskets repr. område
Meddelande nr VI: Vattenomsättningen 1968-73 med felupp-
skattning
av M Persson
Stockholm 1975
8. Hydrologiska undersökningar i Kassjöans repr. område
Meddelande nr IV. Snötaxering 1974 och vattenomsättning
1969-73
av A Waldenström
Stockholm 1975
9. Snösmältningen i en punkt som funktion av meteorologiska
data
av Stig Jönsson
Stockholm 1975
10. Oceanografiska undersökningar i Ålands Hav
Meddelande nr 2: Mätningar okt-dec 1973 och juli-sep 1974
av U Ehlin och C Ambjörn
Stockholm 1975

11. Oceanografiska observationer i Östersjön 1974 med kustbevakningens båtar samt från isbrytare av U Ehlin och B Juhlin
Stockholm 1975
12. Vattenomsättning och flöde i Stormyra-området av Lennart Liljequist och Lars Sterna
Stockholm 1975
13. Hydrologiska undersökningar i Lappträskets representativa område. "Avrinningen och dess variationer inom området". Norrköping 1976. Sh M Persson
14. Vattenomsättningsstudier m.m. i Velens och Kassjöans representativa områden.
Norrköping 1976. Hydr. A Waldenström
15. Strömmätningar i sundet mellan Värmlandssjön och Dalbosjön, Vänern. Vänernundersökningen, meddelande nr 1 av B Carlsson + M Brandt. Norrköping 1976
16. Oceanografiska observationer i Östersjön 1975 med Kustbevakningen båtar samt från isbrytare av U Ehlin + B Juhlin. Norrköping 1976
17. Oceanografiska undersökningar i Ålands Hav 1975
Meddelande nr 3. Mätningar 74-75. Vattentransporter.
U Ehlin + C Anbjörn. Norrköping 1976
18. Tillämpning av HBV-2 modellen på regleringsmagasin Ångermanälven. Sten Bergström + Stig Jönsson
Norrköping 1976
19. Grundvattenståndsmätningar i Ångermanälvens övre tillrinningsområde av T Milanov
Norrköping 1976
20. Beräkning av frekvens av torrår av L Gottschalk
Norrköping 1976

